**Exercice 4** On considère une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $(U_n, n \geq 1)$ prenant ces valeurs dans $G$ (noter qu'il n'est pas nécessaire de supposer $G$ fini). Soit $E$ un ensemble fini et $F$ une application de $E \times G$ dans $E$.

On construit, par récurrence, une suite $(X_n, n \geq 0)$ en posant, $X_0 = x \in E$ et

$$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1}), n \geq 0.$$

1. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov et exprimer sa matrice de transition $P$ en fonction de $F$.

   ▶ **Corrigé:**
   *On remarque que les deux évènements suivant sont identiques :*

$$\begin{aligned}\{F(X_n, U_{n+1}) = x_{n+1}, &X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\} = \\ &= \{F(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\}.\end{aligned}$$

   *On en déduit que :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \\ &= \mathbb{P}(F(X_n, U_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(F(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0),\end{aligned}$$

   *comme $U_{n+1}$ est une variable aléatoire indépendantes du vecteur $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0)$, on obtient*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, &X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(F(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})\mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0), \\ &= \mathbb{P}(F(x_n, U_1 = x_{n+1}))\mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0). \qquad (1)\end{aligned}$$

   *On a donc (définition de la probabilité conditionnelle)*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(F(x_n, U_1 = x_{n+1})).$$

   *En sommant l'équation (1) sur toutes les valeurs de $x_{n-1}, \ldots, x_0$ on obtient*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n) = \mathbb{P}(F(x_n, U_1 = x_{n+1})\mathbb{P}(X_n = x_n),$$

   *ce que l'on peut réécrire $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = \mathbb{P}(F(x_n, U_1 = x_{n+1}))$.*
   *Ce qui prouve que $X$ est une chaîne de Markov et que sa matrice de transition est donnée par $P(x, y) = \mathbb{P}(F(x, U_1 = y))$.* ◀

2. On définit $\tau$ par

$$\tau = \inf \{n \geq 0, X_n = x_0\}.$$

   Montrer que $Y_n = X_{n \wedge \tau}$ est aussi une chaîne de Markov. Calculer sa matrice de transition en fonction de celle de $X$.

   ▶ **Corrigé:**
   *On vérifie par récurrence que $Y_n$ satisfait pour $n \geq 0$, $Y_{n+1} = F(Y_n, U_{n+1})\mathbf{1}_{\{Y_n \neq x_0\}} + x_0 \mathbf{1}_{\{Y_n = x_0\}}$. En posant $G(x, u) = F(x, u)\mathbf{1}_{\{x \neq x_0\}} + x_0 \mathbf{1}_{\{x = x_0\}}$, on voit que $Y_{n+1} = G(Y_n, U_{n+1})$. Ce qui prouve que $Y$ est un chaîne de Markov de matrice de transition $Q$ donnée par*

$$Q(x, y) = \mathbb{P}(G(x, U_1 = y)).$$

   *Sur cette formule, on vérifie facilement que, si $x \neq x_0$, pour tout $y$, $Q(x, y) = P(x, y)$. Pour $x = x_0$ on a, $Q(x_0, x_0) = 1$ et $Q(x_0, y) = 1$ pour $y \neq x_0$.* ◀

**Exercice 5** 1. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de matrice de transition $(P(x,y), x \in \mathbb{E}, y \in E)$ et de loi initiale (i.e. la loi de $X_0$) $(\mu(x), x \in \mathbb{E})$. Calculer la loi du vecteur $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ et en déduire la loi de $X_n$.

▶ **Corrigé:**

*La propriété de Markov, nous dit que*

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = P(x_{n-1}, x_n),$$

*ce que l'on peut réécrire*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) &= \\ &= P(x_{n-1}, x_n)\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0).\end{aligned}$$

*On obtient, par récurrence, la loi de* $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) &= \\ &= \mathbb{P}(X_0 = x_0)P(x_0, x_1)\ldots P(x_{n-2}, x_{n-1})P(x_{n-1}, x_n).\end{aligned}$$

*Pour obtenir la loi de* $X_n$*, il suffit de sommer la formule précédente en* $x_{n-1}$,$x_{n-2}$,…,$x_0$*, et l'on obtient*

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = \sum_{x_0 \in E, x_1 \in E, \ldots, x_{n-2} \in E, x_{n-1} \in E} \mu(x_0)P(x_0, x_1)\ldots P(x_{n-1}, x_n).$$

*On peut réécrire cette dernière formule à l'aide de notations matricielles sous la forme*

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = [\mu P^n](x_n).$$

◀

2. Montrez que $P^n(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x)$. En particulier, montrez que si la chaîne part d'un point déterministe $x_0$ [i.e. $X_0 = x_0$ avec probabilité 1], alors

$$\mathbb{P}(X_n = y) = P^n(x_0, y).$$

▶ **Corrigé:**

*Dans ce cas* $\mu(x) = \mathbb{P}(X_0 = x)$ *vaut* 1 *pour* $x = x_0$ *et* 0 *sinon. Autrement dit, le vecteur (ligne)* $\mu = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ *(le* 1 *correspondant à l'état* $x_0$*). La formule de l'exercice précédent s'écrit simplement*

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = P^n(x_0, x_n).$$

◀

3. Calculer la loi du couple $(X_n, X_N)$, pour $n < N$, et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(f(X_N) | X_n = x\right) = P^{N-n}f(x),$$

et, en particulier, que si $X_0 = x_0$ avec probabilité 1, $\mathbb{E}(f(X_N)) = P^N f(x_0)$.

▶ **Corrigé:**

*La propriété de Markov implique (exercice 2, question 1) que*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_N = x_N, X_{N-1} = x_{N-1}, \ldots, X_0 = x_0) &= \\ &= \mathbb{P}(X_0 = x_0)P(x_0, x_1)\ldots P(x_{N-2}, x_{N-1})P(x_{N-1}, x_N).\end{aligned}$$

*Lorsque $n < N$, en sommant sur toutes les valeurs de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_{N-1}$, on obtient*

$$\mathbb{P}(X_N = x_N, X_n = x_n) = [\mu P^n](x_n) P^{N-n}(x_n, x_N).$$

*On obtient donc une formule pour le loi du couple $(X_n, X_N)$. Notez que cette formule se réécrit aussi*

$$\mathbb{P}(X_N = x_N, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_n = x_n) P^{N-n}(x_n, x_N), \tag{2}$$

*puisque $\mathbb{P}(X_n = x_n) = [\mu P^n](x_n)$.*
*Soit $f$ une fonction de $E$ dans $\mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f(X_N)\mathbf{1}_{\{X_n=x\}}\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{y\in E} f(y)\mathbf{1}_{\{X_n=x, X_N=y\}}\right) \\ &= \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{P}\left(X_n = x, X_N = y\right).\end{aligned}$$

*En utilisant l'équation (2), on obtient*

$$\mathbb{E}\left(f(X_N)\mathbf{1}_{\{X_n=x\}}\right) = \mathbb{P}(X_n = x) \sum_{y\in E} P^{N-n}(x,y) f(y).$$

*Comme (par définition)*

$$\mathbb{E}\left(f(X_N)|X_n = x\right) = \frac{\mathbb{E}\left(f(X_N)\mathbf{1}_{\{X_n=x\}}\right)}{\mathbb{P}(X_n = x)},$$

*on obtient la formule demandée.* ◀

**Exercice 6** Soit $(X_n, n \geq 0)$ un processus de Markov de matrice de transition $P$ sur un espace fini $E$. Pour une fonction $f$ de $E$ dans $\mathbb{R}$, on note $P^0 f(x) = f(x)$, puis récurence

$$P^{k+1} f(x) = \sum_{y\in E} P(x,y) P^k f(y).$$

1. Vérifier que $P^k$ est bien la puissance $k$-ième (au sens du produit des matrices) de $P$.

   ▶ **Corrigé:**
   *Si on note les fonctions $f$, $Pf$, $\ldots$, $P^N f$ comme des vecteurs colonnes et que $P$ désigne une matrice, la relation précédente est bien la définition par récurrence du vecteur $P^{k+1} f$.*
   ◀

On définit $u(n,x)$ par

$$u(n,x) = P^{N-n} f(x), x \in E, n \leq N,$$

2. Vérifier que l'on a

$$\left\{\begin{array}{lll} u(N,x) & = & f(x) \quad x \in E \\ u(n,x) & = & \sum_{y\in E} P(x,y) u(n+1,y) \quad x \in E, n < N. \end{array}\right.$$

   ▶ **Corrigé:**
   *En faisant $n = N$ on obtient bien $u(N,x) = f(x)$ ($P^0 f = f$). D'autre part $u(n,x) = [P^{N-n} f](x) = [P[P^{N-(n+1)} f]](x) = P[u(n+1,.)](x)$ ou encore*

$$u(n,x) = \sum_{y\in E} P(x,y) u(n+1,y).$$

   ◀

3. Montrer que $\mathbb{E}(u(n, X_n)) = \mathbb{E}(u(n+1, X_{n+1}))$ pour $0 \leq n < N$.

   ▶ **Corrigé:**

   *On note $x_{0:n}$ pour $(x_0, \ldots, x_n)$. La loi de $X_{0:n+1} = (X_{0:n}, X_{n+1})$ est donnée par (c'est un façon d'exprimer la propriété de Markov)*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}\right) &= \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}, X_{n+1} = x_{n+1}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(u(n+1, X_{n+1})\right) &= \sum_{x_{0:n+1} \in E^{n+2}} u(n+1, x_{n+1}) \mathbb{P}\left(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}\right),\\ \textit{[propriété de Markov]} &= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}, x_{n+1} \in E} u(n+1, x_{n+1}) \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) P(x_n, x_{n+1}),\\ &= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}} \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) \sum_{x_{n+1} \in E} P(x_n, x_{n+1}) u(n+1, x_{n+1}),\\ \textit{[définition de } u(n,.)\textit{]} &= \sum_{x_{0:n} \in E^{n+1}} \mathbb{P}\left(X_{0:n} = x_{0:n}\right) u(n, x_n) = \mathbb{E}\left(u(n, X_n)\right).\end{aligned}$$

   ◀

4. Redémontrer à partir de cette propriété, le résultat de l'exercice précédent : si la chaîne part de $x_0$ à l'instant 0, $\mathbb{E}(f(X_n)) = u(0, x_0) = P^N f(x_0)$.

   ▶ **Corrigé:**

   *On écrit, en utilisant la propriété précédente $N$ fois*

$$\mathbb{E}(u(N, X_N)) = \mathbb{E}(u(N-1, X_{N-1})) = \cdots = \mathbb{E}(u(1, X_1)) = \mathbb{E}(u(0, X_0)).$$

   *Comme, d'une part $\mathbb{E}(u(N, X_N)) = \mathbb{E}(f(X_N))$ $(u(N, .) = f(.))$ et d'autre part $\mathbb{E}(u(0, X_0)) = u(0, x_0)$ (puisque $X_0 = x_0$ avec probabilité 1), on obtient*

$$u(0, x_0) = \mathbb{E}(f(X_N)).$$

   ◀